

Rozdział II

CIĄGI NIESKOŃCZONE

§ 2.1. UWAGI OGÓLNE O CIĄGACH

Jeżeli każdej liczbie naturalnej n zostanie przyporządkowana jedna liczba rzeczywista u_n , to mówimy, że został określony *nieskończony ciąg liczbowy*.

Ciąg nieskończony zapisuje się w postaci

$$u_1, u_2, \dots, u_n, \dots \quad \text{lub} \quad \{u_n\}.$$

Liczby u_1, u_2, \dots nazywamy *wyrazami ciągu* $\{u_n\}$; symbol u_n nazywamy *wyrazem ogólnym* tego ciągu.

Ciąg nieskończony $\{u_n\}$ ma *granice* g , jeżeli dla każdej liczby dodatniej ε można znaleźć w ciągu (istnieje w ciągu) takie miejsce N , że dla każdego $n \geq N$ zachodzi nierówność

$$|u_n - g| < \varepsilon.$$

Zamiast słów: „ciąg $\{u_n\}$ ma granicę g ”, mówi się również: „ciąg $\{u_n\}$ dąży do granicy g ”. Zapisujemy

$$u_n \rightarrow g, \text{ gdy } n \rightarrow \infty, \quad \text{lub} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = g.$$

Mówimy, że ciąg nieskończony $\{u_n\}$ ma *granice* ∞ (plus nieskończoność), jeżeli dla każdej liczby $M > 0$ można znaleźć w ciągu (istnieje w ciągu) takie miejsce N , że dla każdego $n \geq N$ zachodzi nierówność

$$u_n > M.$$

Zamiast słów: „ciąg $\{u_n\}$ ma granicę $+\infty$ ”, mówi się również: „ciąg $\{u_n\}$ dąży do plus nieskończoności”. Zapisujemy

$$u_n \rightarrow \infty, \text{ gdy } n \rightarrow \infty, \quad \text{lub} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty.$$

Mówimy, że ciąg nieskończony $\{u_n\}$ ma *granice* $-\infty$ (minus nieskończoność), jeżeli dla każdej liczby $M > 0$ można znaleźć w ciągu (istnieje w ciągu) takie miejsce N , że dla każdego $n \geq N$ zachodzi nierówność

$$u_n < -M.$$

Zamiast słów: „ciąg $\{u_n\}$ ma granicę $-\infty$ ”, mówi się również: „ciąg $\{u_n\}$ dąży do minus

nieskończoności". Zapisujemy

$$u_n \rightarrow -\infty, \text{ gdy } n \rightarrow \infty, \quad \text{lub} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty.$$

Nie każdy ciąg nieskończony ma granicę, na przykład ciąg nieskończony 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, ... nie ma granicy.

Ciąg nieskończony, który ma granicę skończoną, nazywamy *ciągami zbieżnym*. Wszystkie inne ciągi nieskończone nazywamy *ciągami rozbieżnymi*; w szczególności jeżeli ciąg $\{u_n\}$ dąży do $+\infty$, to mówimy, że jest *rozbieżny do plus nieskończoności* i podobnie mówimy o ciągu *rozbieżnym do minus nieskończoności*.

Zmiana skończonej ilości wyrazów ciągu nieskończonego nie wpływa na istnienie granicy ciągu ani na jej wartość.

ZADANIE 2.1. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym

$$u_n = \frac{2n^2 - 3n + 5}{3 + 7n - 6n^2}.$$

Rozwiązanie. Dzielimy licznik i mianownik przez najwyższą potęgę zmiennej naturalnej ⁽¹⁾ występującą w mianowniku ułamka, tj. przez n^2 , otrzymujemy

$$u_n = \frac{\frac{2n^2}{n^2} - \frac{3n}{n^2} + \frac{5}{n^2}}{\frac{3}{n^2} + \frac{7n}{n^2} - \frac{6n^2}{n^2}} = \frac{2 - \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}}{\frac{3}{n^2} + \frac{7}{n} - 6}.$$

Do licznika i mianownika stosujemy twierdzenie:

(2.1.1) *Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ ma granicę a i ciąg $\{b_n\}$ ma granicę b , to ciąg $\{a_n + b_n\}$ ma granicę $a + b$.*

Zauważmy, że przy $n \rightarrow \infty$ mamy $3/n \rightarrow 0$, $5/n^2 \rightarrow 0$, $3/n^2 \rightarrow 0$, $7/n \rightarrow 0$. Granicą licznika jest więc $2 - 0 + 0 = 2$, a granicą mianownika $0 + 0 - 6 = -6$.

Następnie stosujemy twierdzenie:

(2.1.2) *Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ ma granicę a , ciąg $\{b_n\}$ ma granicę b , przy czym żaden z wyrazów ciągu $\{b_n\}$ nie równa się zeru, ani też jego granica b nie jest równa zeru, to ciąg ilorazów $\{a_n/b_n\}$ ma granicę a/b .*

A więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}.$$

W ten sam sposób postępujemy zawsze, gdy licznik i mianownik są wielomianami tego samego stopnia względem n . Ogólnie biorąc, prawdziwe jest następujące twierdzenie:

(2.1.3) *Jeżeli licznik i mianownik ułamka są wielomianami tego samego stopnia względem zmiennej naturalnej n , to granica takiego ułamka przy $n \rightarrow \infty$ równa się stosunkowi współczynników przy najwyższych potęgach n .*

⁽¹⁾ Tzn. zmiennej przybierającej wartości liczb naturalnych.

ZADANIE 2.2. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym

$$u_n = \frac{4n^3 - 5n + 1}{3n^5 + 2n^2 - 4}.$$

Rozwiązanie. Podzielmy licznik i mianownik przez najwyższą potęgę zmiennej naturalnej n występującą w mianowniku ułamka, tj. przez n^5 ; po skróceniu poszczególnych ułamków powstałych w liczniku i mianowniku otrzymujemy

$$u_n = \frac{\frac{4}{n^2} - \frac{5}{n^4} + \frac{1}{n^5}}{3 + \frac{2}{n^3} - \frac{4}{n^5}} \rightarrow \frac{0}{3} = 0, \quad \text{gdy } n \rightarrow \infty.$$

A więc granicą danego ciągu jest 0.

Ogólnie biorąc, prawdziwe jest twierdzenie:

(2.1.4) *Jeżeli mianownik ułamka jest wielomianem stopnia wyższego względem zmiennej naturalnej n aniżeli licznik, to granica takiego ułamka przy $n \rightarrow \infty$ równa się zeru.*

ZADANIE 2.3. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym

$$u_n = \frac{2n^2 - 5n + 8}{15n - 3}.$$

Rozwiązanie. Podzielmy licznik i mianownik ułamka przez najwyższą potęgę zmiennej naturalnej n występującą w mianowniku ułamka, tj. przez n ; po skróceniu ułamków w liczniku i mianowniku otrzymujemy

$$u_n = \frac{2n - 5 + \frac{8}{n}}{15 - \frac{3}{n}}.$$

Gdy $n \rightarrow \infty$, licznik rośnie nieograniczenie, a mianownik dąży do 15, a więc dany ciąg ma granicę $+\infty$.

Mamy twierdzenie:

(2.1.5) *Jeżeli licznik ułamka jest wielomianem względem zmiennej naturalnej n stopnia wyższego niż mianownik, to gdy $n \rightarrow \infty$, wartość bezwzględna ułamka dąży do nieskończoności.*

ZADANIE 2.4. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym

$$a_n = \frac{(0,99)^n}{n+1}.$$

Rozwiązanie opieramy na wiadomościach o ciągu geometrycznym. Ciąg o wyrazie ogólnym $u_n = q^n$ ma skończoną granicę tylko dla $-1 < q \leq 1$, przy czym:

(2.1.6) *Jeżeli $-1 < q < 1$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.*

(2.1.7) *Jeżeli $q = 1$, to $q^n = 1$, więc $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 1$.*

W myśl wzoru (2.1.6) licznik badanego ułamka ze wzrostem n dąży do zera, a mianownik rośnie nieograniczenie, więc granicą ułamka jest 0:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

ZADANIE 2.5. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym

$$u_n = \sqrt{4n^2 + 5n - 7} - 2n.$$

Rozwiązanie. Bezpośrednie wnioskowanie z postaci wyrazu u_n jest trudne, bo zarówno odjemna, jak i odjemnik rosną nieograniczenie ze wzrostem n . Przekształćmy to wyrażenie korzystając z następującego wzoru algebry elementarnej:

$$a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b}.$$

Otrzymujemy

$$u_n = \frac{(\sqrt{4n^2 + 5n - 7})^2 - 4n^2}{\sqrt{4n^2 + 5n - 7} + 2n} = \frac{5n - 7}{\sqrt{4n^2 + 5n - 7} + 2n}.$$

Dzielimy teraz licznik i mianownik przez n pamiętając o tym, że aby podzielić pierwiastek kwadratowy przez n , należy wyrażenie podpierwiastkowe podzielić przez n^2 . Następnie stosujemy twierdzenie:

(2.1.8) *Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ o wyrazach nieujemnych ma granicę a , to ciąg $\{\sqrt[p]{a_n}\}$, gdzie p jest ustaloną liczbą naturalną, ma granicę $\sqrt[p]{a}$.*

Jest więc

$$u_n = \frac{5 - \frac{7}{n}}{\sqrt{4 + \frac{5}{n} - \frac{7}{n^2}} + 2} \rightarrow \frac{5}{\sqrt{4 + 2}} = \frac{5}{4}, \quad \text{gdy } n \rightarrow \infty.$$

Poszukiwana granica istnieje i jest równa $\frac{5}{4}$.

ZADANIE 2.6. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym

$$u_n = \sqrt[3]{n^3 + 2n^2 + 4} - \sqrt[3]{n^3 + 1}.$$

Rozwiązanie. Przekształćmy dane wyrażenie korzystając z rozkładu różnicy sześcianów

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2),$$

skąd

$$a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}.$$

Otrzymujemy

$$u_n = \frac{(n^3 + 2n^2 + 4) - (n^3 + 1)}{\sqrt[3]{(n^3 + 2n^2 + 4)^2} + \sqrt[3]{(n^3 + 2n^2 + 4)(n^3 + 1)} + \sqrt[3]{(n^3 + 1)^2}}.$$

Po wykonaniu redukcji licznik ułamka przybiera postać $2n^2 + 3$. Podzielmy licznik i mianownik przez taką potęgę n , aby w mianowniku otrzymać wyrażenie, którego granicą jest liczba skończona, różna od zera. Widoczne jest, że w tym przykładzie taką potęgą jest n^2 .

Zauważmy, że:

1° aby podzielić pierwiastek sześcienny przez n^2 , należy wyrażenie podpierwiastkowe podzielić przez $(n^2)^3$, tj. przez n^6 ;

2° aby podzielić kwadrat wyrażenia przez n^6 , można samo wyrażenie podzielić przez n^3 ;

3° aby podzielić iloczyn dwóch czynników przez n^6 , wystarczy podzielić każdy z tych czynników przez n^3 .

Po podzieleniu licznika i mianownika przez n^2 przy zastosowaniu podanych reguł i po skróceniu poszczególnych ułamków otrzymujemy

$$u_n = \frac{2 + \frac{3}{n^2}}{\sqrt[3]{\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{4}{n^3}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{4}{n^3}\right)\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)} + \sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^2}}.$$

Przechodząc do granicy otrzymujemy ostatecznie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{2}{1+1+1} = \frac{2}{3}.$$

ZADANIE 2.7. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym

$$u_n = \frac{3^{2n+1} - 7}{9^n + 4}.$$

Rozwiązanie. Zwróćmy uwagę na to, że $3^{2n+1} = 3^{2n} \cdot 3^1 = (3^2)^n \cdot 3 = 9^n \cdot 3$. Wyraz ogólny ciągu możemy napisać w postaci

$$u_n = \frac{3 \cdot 9^n - 7}{9^n + 4}$$

i po podzieleniu licznika i mianownika przez 9^n otrzymujemy

$$u_n = \frac{3 - \frac{7}{9^n}}{1 + \frac{4}{9^n}} \rightarrow \frac{3}{1} = 3, \quad \text{gdy } n \rightarrow \infty.$$

Granica ciągu istnieje i jest równa 3.

ZADANIE 2.8. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym

$$u_n = \sqrt[n]{3^n + 5^n + 7^n}.$$

Rozwiązanie. Zwróćmy uwagę na oczywistą nierówność

$$7^n < 3^n + 5^n + 7^n < 7^n + 7^n + 7^n,$$

z której wynika, że

$$\sqrt[n]{7^n} < \sqrt[n]{3^n + 5^n + 7^n} < \sqrt[n]{3 \cdot 7^n}, \quad \text{czyli} \quad 7 < \sqrt[n]{3^n + 5^n + 7^n} < 7\sqrt[n]{3}.$$

Zastosujemy tu tzw. *twierdzenie o trzech ciągach*:

(2.1.9) *Jeżeli wyrazy ogólne trzech ciągów $\{a_n\}$, $\{u_n\}$, $\{b_n\}$ spełniają dla $n \geq n_0$ nierówność*

$$a_n \leq u_n \leq b_n$$

i jeżeli ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ mają wspólną granicę g , tzn.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g,$$

to ciąg $\{u_n\}$ ma tę samą granicę, czyli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = g.$$

Wyrazy badanego ciągu $\{u_n\}$ są zawarte pomiędzy odpowiednimi wyrazami $a_n = 7$ i $b_n = 7\sqrt[n]{3}$ dwóch ciągów, tzn. $a_n < u_n < b_n$. Opierając się na wzorze

$$(2.1.10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \text{dla} \quad a > 0$$

mamy $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 7 \cdot 1 = 7$; jest też oczywiście $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 7$, a więc również $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 7$. Ostatecznie otrzymujemy

$$u_n = \sqrt[n]{3^n + 5^n + 7^n} \rightarrow 7, \quad \text{gdy} \quad n \rightarrow \infty.$$

ZADANIE 2.9. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym

$$u_n = \left(1 + \frac{4}{n}\right)^n.$$

Rozwiązanie. Gdy $n \rightarrow \infty$, wówczas $4/n \rightarrow 0$, a więc $1 + 4/n \rightarrow 1$. Mogłoby się wobec tego wydawać, że granicą ciągu $\{u_n\}$ jest liczba 1. Wnioskować jednak w ten sposób nie wolno, ponieważ w danym przypadku jednocześnie ze zmianą podstawy potęgi zmienia się wykładnik potęgi.

Aby znaleźć granicę ciągu, przypomnijmy sobie jeden z podstawowych wzorów teorii granic:

$$(2.1.11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

gdzie $e = 2,71828 \dots$ jest podstawą logarytmów naturalnych.

Mamy także wzór ogólniejszy

$$(2.1.12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e, \quad \text{jeżeli} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad \text{i} \quad a_n \neq 0.$$

Weźmy pod uwagę nasz ciąg, przekształcony w następujący sposób:

$$u_n = \left[\left(1 + \frac{4}{n} \right)^{\frac{n}{4}} \right]^4.$$

Podstawiając we wzorze (2.1.12) $a_n = 4/n$ otrzymujemy, że granicą ciągu $\{u_n\}$ jest e^4 .

ZADANIE 2.10. Znaleźć granicę ciągu o wyrazie ogólnym

$$u_n = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n.$$

Rozwiązanie. Przekształćmy ułamek dzieląc licznik i mianownik przez n ; mamy wówczas

$$u_n = \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n}.$$

Gdy $n \rightarrow \infty$ mianownik dąży do e , na podstawie wzoru (2.1.11) zadania poprzedniego, a więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right) = \frac{1}{e}.$$

ZADANIE 2.11. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym

$$u_n = \sqrt[n]{\frac{1}{n}}.$$

Rozwiązanie. Gdy $n \rightarrow \infty$, to $1/n \rightarrow 0$ i mogłoby się wydawać, że granicą ciągu $\{u_n\}$ jest liczba 0. Ale tak nie jest, gdyż jednocześnie ze zmniejszaniem się liczby podpierwiastkowej stopień pierwiastka n rośnie nieograniczenie, co wpływa na powiększenie się wyrazów ciągu począwszy od u_3 . Jest bowiem

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3}} < \frac{1}{\sqrt[4]{4}} < \frac{1}{\sqrt[5]{5}} < \dots < \frac{1}{\sqrt[n]{n}} < \dots$$

Granice rozważanego ciągu obliczamy na podstawie jednego z podstawowych wzorów teorii granic:

$$(2.1.13) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Zatem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{1} = 1$$

ZADANIE 2.12. Wykazać, że jeżeli dla ciągu $\{u_n\}$ istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = q < 1,$$

to $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Rozwiązanie. Weźmy pod uwagę ciąg bezwzględnych wartości wyrazów danego ciągu: $\{|u_n|\}$. Ciąg ten od pewnego miejsca musi być malejący, ponieważ na podstawie definicji granicy dla każdego ε istnieje takie N , że

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \leq q + \varepsilon \quad \text{dla} \quad n \geq N.$$

Weźmy ε tak małe, aby $q + \varepsilon < 1$; wtedy

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1 \quad \text{czyli} \quad |u_{n+1}| < |u_n|.$$

Ciąg $\{|u_n|\}$, jako malejący i ograniczony liczbą 0, musi mieć granicę nieujemną, skończoną. Twierdzimy, że granicą tą musi być 0, gdyż jeśli $|u_n| \rightarrow g \neq 0$, to

$$|u_{n+1}| \rightarrow g \quad \text{i} \quad \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \rightarrow \frac{g}{g} = 1 \neq q,$$

wbrew założeniu.

Wykazaliśmy więc, że $|u_n| \rightarrow 0$, a tym samym i $u_n \rightarrow 0$, ponieważ $-|u_n| \leq u_n \leq |u_n|$.

Uwaga. Podobnie można wykazać, że jeżeli dla ciągu $\{u_n\}$ istnieje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = q > 1,$$

to $|u_n| \rightarrow +\infty$, a więc ciąg $\{u_n\}$ jest rozbieżny.

ZADANIE 2.13. Obliczyć

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{10}}{2^n}.$$

Rozwiązanie. Mamy

$$u_n = \frac{n^{10}}{2^n}, \quad \text{skąd} \quad u_{n+1} = \frac{(n+1)^{10}}{2^{n+1}}.$$

Obliczamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{10} \cdot 2^n}{2^{n+1} n^{10}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10}}{2} = \frac{1}{2},$$

a więc, na podstawie poprzedniego zadania,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{10}}{2^n} = 0.$$

ZADANIE 2.14. Kapitał $k = 1000$ zł podlega oprocentowaniu po $p = 6\%$ rocznie w ciągu $t = 3$ lata. Obliczyć kapitał końcowy:

- a) gdy odsetki są dopisywane do kapitału w końcu każdego roku;
 b) gdy odsetki są dopisywane do kapitału m razy w roku co $1/m$ roku (obliczyć dla $m=12$);
 c) gdy oprocentowanie odbywa się w sposób ciągły, tzn. gdy $m \rightarrow \infty$.

Rozwiązanie. Mamy

$$a) \quad K_1 = k \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t,$$

$$b) \quad K_m = k \left(1 + \frac{p}{100m}\right)^{mt},$$

$$c) \quad K = \lim_{m \rightarrow \infty} K_m = \lim_{m \rightarrow \infty} k \left(1 + \frac{p}{100m}\right)^{mt} = k \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{p}{100m}\right)^{100m/p} \right]^{pt/100} = ke^{pt/100}.$$

Obliczenia:

$$a) \quad K_1 = 1000 \left(1 + \frac{6}{100}\right)^3 = 1191,0 \text{ zł},$$

$$b) \quad K_{12} = 1000 \left(1 + \frac{6}{1200}\right)^{12 \cdot 3} = 1196,2 \text{ zł},$$

$$c) \quad K = 1000e^{6 \cdot 3/100} = 1197,2 \text{ zł}.$$

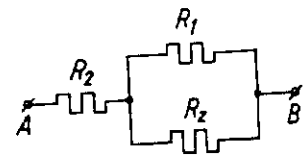
ZADANIE 2.15. Po zamknięciu obwodu elektrycznego, zawierającego oporność czynną oraz indukcyjność, natężenie prądu zmienia się według równania $i = 15(1 - e^{-2t})$. Obliczyć natężenie prądu w chwili $t=0$ oraz graniczną wartość natężenia przy $t \rightarrow \infty$.

Rozwiązanie. Dla $t=0$ mamy $i=0$, a dla $t \rightarrow \infty$ mamy

$$i = 15 \lim_{t \rightarrow \infty} (1 - e^{-2t}) = 15.$$

ZADANIE 2.16. W przypadku oporów połączonych jak na podanym rysunku 2.1 oporność wypadkowa wyraża się wzorem

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_2.$$



Rys. 2.1

Wyznaczyć przedział, w którym zmienia się oporność wypadkowa R , gdy opornik R_2 będzie regulowany od 0 do ∞ . Wykonać obliczenie dla $R_1=2$ i $R_2=3$.

Rozwiązanie. Zbadajmy pochodną dR/dR_2 :

$$\frac{dR}{dR_2} = \frac{R_1(R_1 + R_2) - R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} = \frac{R_1^2}{(R_1 + R_2)^2}.$$

Ponieważ pochodna ta jest stale dodatnia, więc ze wzrostem R_2 oporność wypadkowa R rośnie.

Gdy $R_z=0$, oporność wypadkowa wynosi $R=R_2=3$. Aby obliczyć do jakiej granicy dąży R , gdy $R_z \rightarrow \infty$, obliczamy

$$\lim_{R_z \rightarrow \infty} \left(\frac{2R_z}{2+R_z} + 3 \right) = \lim_{R_z \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\frac{2}{R_z} + 1} + 3 \right) = 5.$$

A więc gdy oporność R_z zmienia się od 0 do ∞ , oporność wypadkowa R rośnie od 3 do 5 omów.

Zadania

Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym (zad. 2.17 - 2.40):

$$2.17. u_n = \frac{n}{n+1}.$$

$$2.18. u_n = \frac{4n-3}{6-5n}.$$

$$2.19. u_n = \frac{n^2-1}{3-n^3}.$$

$$2.20. u_n = \frac{2n^3-4n-1}{6n+3n^2-n^3}.$$

$$2.21. u_n = \frac{(n-1)(n+3)}{3n^2+5}.$$

$$\spadesuit 2.22. u_n = \frac{(2n-1)^2}{(4n-1)(3n+2)}.$$

$$2.23. u_n = \frac{(2n-1)^3}{(4n-1)^2(1-5n)}.$$

$$\spadesuit 2.24. u_n = \frac{3}{n} - \frac{10}{\sqrt{n}}.$$

$$2.25. u_n = \frac{(-1)^n}{2n-1}.$$

$$2.26. u_n = \left(\frac{2n-3}{3n+1} \right)^2.$$

$$2.27. u_n = \left(\frac{5n-2}{3n-1} \right)^3.$$

$$2.28. u_n = \frac{(\sqrt{n}+3)^2}{n+1}.$$

$$2.29. u_n = \frac{\sqrt{n}-2}{3n+5}.$$

$$2.30. u_n = \frac{n-10}{3}.$$

$$2.31. u_n = \frac{(-0,8)^n}{2n-5}.$$

$$2.32. u_n = \frac{2-5n-10n^2}{3n+15}.$$

$$2.33. u_n = \frac{2n+(-1)^n}{n}.$$

$$\sqrt{2.34. u_n = \frac{\sqrt{1+2n^2} - \sqrt{1+4n^2}}{n}}.$$

$$2.35. u_n = \sqrt{\frac{3n-2}{n+10}}.$$

$$2.36. u_n = \sqrt[3]{\frac{n-1}{8n+10}}.$$

$$2.37. u_n = \frac{\sqrt{n^2+4}}{3n-2}.$$

$$2.38. u_n = \frac{\sqrt{n^2-1}}{\sqrt[3]{n^3+1}}.$$

$$2.39. u_n = \frac{n}{\sqrt[3]{8n^3-n-n}}.$$

$$2.40. u_n = \frac{1}{\sqrt{4n^2+7n-2n}}.$$

Opierając się na zadaniach 2.5 i 2.6 obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym (zad. 2.41 - 2.47):

$$2.41. u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}.$$

$$2.42. u_n = \sqrt{n^2+n} - n.$$

$$2.43. u_n = n - \sqrt{n^2+5n}.$$

$$2.44. u_n = \sqrt{3n^2+2n-5} - n\sqrt{3}.$$

$$2.45. u_n = 3n - \sqrt{9n^2+6n-15}.$$

$$2.46. u_n = \sqrt[3]{n^3+4n^2} - n.$$

$$2.47. u_n = n\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2n^3+5n^2-7}.$$

Opierając się na zadaniu 2.7 znaleźć granicę ciągu o wyrazie ogólnym (zad. 2.48 - 2.53):

$$2.48. u_n = \frac{4^{n-1} - 5}{2^{2n} - 7}.$$

$$2.49. u_n = \frac{5 \cdot 3^{2n} - 1}{4 \cdot 9^n + 7}.$$

$$2.50. u_n = \frac{3 \cdot 2^{2n+2} - 10}{5 \cdot 4^{n-1} + 3}.$$

$$2.51. u_n = \frac{-8^{n-1}}{7^{n+1}}.$$

$$2.52. u_n = \frac{2^{n+1} - 3^{n+2}}{3^{n+2}}.$$

$$2.53. u_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{2^{n+1} - 1}{3^{n+1} - 1}.$$

Opierając się na zadaniu 2.8 obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym (zad. 2.54 - 2.57):

$$2.54. u_n = \sqrt[n]{3^n + 2^n}.$$

$$2.55. u_n = \sqrt[n]{10^n + 9^n + 8^n}.$$

$$2.56. u_n = \sqrt[n]{10^{100}} - \sqrt[n]{\frac{1}{10^{100}}}.$$

$$2.57. u_n = \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n}.$$

Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym (zad. 2.58 - 2.63):

$$2.58. u_n = \frac{1+2+\dots+n}{n^2}.$$

Wskazówka. Oprzeć się na wzorze (por. zad. 1.59):

$$1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$2.59. u_n = \frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^3}.$$

Wskazówka. Oprzeć się na wzorze (por. zad. 1.56):

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$2.60. u_n = \frac{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}{n^4}.$$

Wskazówka. Oprzeć się na wzorze (por. zad. 1.62):

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

$$2.61. u_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}}.$$

$$2.62. u_n = \frac{1 + a + a^2 + \dots + a^n}{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{4^n}}.$$

$$2.63. u_n = \frac{1}{n^k} + \frac{2}{n^k} + \dots + \frac{n}{n^k}.$$

Opierając się na zadaniu 2.9 znaleźć granicę ciągu o wyrazie ogólnym (zad. 2.64–2.70):

$$2.64. u_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n.$$

$$2.65. u_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n.$$

$$2.66. u_n = \left(\frac{n+5}{n}\right)^n.$$

$$2.67. u_n = \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n.$$

$$2.68. u_n = \left(1 - \frac{4}{n}\right)^{-n+3}$$

$$2.69. u_n = \left(\frac{n^2+6}{n^2}\right)^{n^2}.$$

$$2.70. u_n = \left(\frac{n^2+2}{2n^2+1}\right)^{n^2}.$$

Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym (zad. 2.71 - 2.90):

$$2.71. u_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}.$$

$$2.72. u_n = \sqrt{n(n-\sqrt{n^2-1})}.$$

$$2.73. u_n = n(\sqrt{2n^2+1} - \sqrt{2n^2-1}).$$

$$2.74. u_n = \sqrt[n]{2n^3 - 3n^2 + 15}.$$

$$2.75. u_n = \sqrt{n^{10} - 2n^2 + 2}.$$

$$2.76. u_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}.$$

$$2.77. u_n = \frac{1}{2n} \cos n^3 - \frac{3n}{6n+1}.$$

$$2.78. u_n = 2^{-n} a \cos n\pi.$$

$$2.79. u_n = \frac{n \sin n!}{n^2+1}.$$

$$2.80. u_n = (\sin n!) \frac{n}{n^2+1} + \frac{2n}{3n+1} \cdot \frac{n}{1-3n}.$$

$$2.81. u_n = \frac{2n}{2n^2-1} \cos \frac{n+1}{2n-1} - \frac{n}{1-2n} \cdot \frac{n(-1)^n}{n^2+1}.$$

$$2.82. u_n = n(\ln(n+1) - \ln n).$$

$$2.83. u_n = \frac{\ln\left(1 + \frac{3}{n}\right)}{\frac{1}{n}}.$$

$$2.84. u_n = \frac{\log_2 n^5}{\log_8 n}.$$

$$2.85. u_n = \frac{9^{\log_3 n}}{4^{\log_2 n}}.$$

$$2.86. u_n = \frac{8^{\log_2 n}}{2^n}.$$

$$2.87. u_n = \frac{27^{\log_3 n}}{16^{\log_2 n}}.$$

$$2.88. u_n = \frac{n!}{n^n}.$$

$$2.89. u_n = \frac{2^n \cdot 3^{2n}}{n!}.$$

$$2.90. u_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

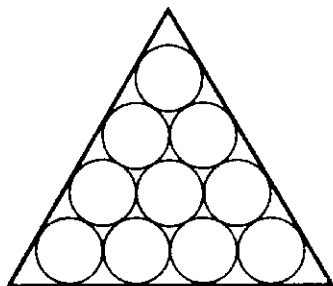
Wskażówka. Każdy czynnik postaci $1 - \frac{1}{k^2}$ przedstawić w postaci

$$\frac{k^2-1}{k^2} = \frac{k-1}{k} \cdot \frac{k+1}{k},$$

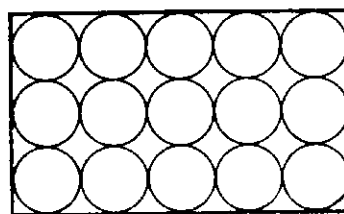
a następnie uprościć iloczyn.

2.91. Okazać, że jeżeli $\sqrt[n]{|u_n|} \rightarrow q < 1$, to $u_n \rightarrow 0$.

2.92. W trójkąt równoboczny o boku a wpisano k_n okręgów o jednakowych promieniach r_k tak jak na rysunku 2.2. Niech S_{k_n} oznacza sumę pól tych okręgów, a S oznacza pole danego trójkąta. Znaleźć granicę stosunku S_{k_n}/S przy $n \rightarrow \infty$.



Rys. 2.2



Rys. 2.3

2.93. W prostokąt wpisano k_n okręgów (jak to podano na rysunku 2.3) o jednakowych promieniach. Niech a i b oznaczają długości boków prostokąta, a $a/2n$ promień wpisanych okręgów. Znaleźć granicę stosunku S_{k_n}/S przy $n \rightarrow \infty$, jeżeli S_{k_n} oznacza pole k_n wpisanych okręgów, a S pole danego prostokąta.

2.94. Odcinek AB o długości d podzielono na n równych części (rys. 2.4). Na każdej z nich z pominięciem pierwszej i ostatniej zbudowano równoboczne trójkąty. Obliczyć granicę pól S_n i obwodów P_n otrzymanej figury przy $n \rightarrow \infty$.



Rys. 2.4

2.95. Punkt P_1 dzieli odcinek AB o długości l na dwie równe części; punkt P_2 dzieli odcinek AP_1 na połowy, punkt P_3 dzieli odcinek P_2P_1 na połowy; punkt P_4 w ten sam sposób dzieli odcinek P_2P_3 itd. Określić graniczne położenie punktu P_n przy $n \rightarrow \infty$.

2.96. Pewna reakcja chemiczna przebiega w ten sposób, że przyrost ilościowy substancji w każdym przedziale czasu τ jest proporcjonalny do długości przedziału i do początkowej ilości materii znajdującej się w początku tego przedziału. Zakładając, że w chwili rozpoczęcia reakcji ilość substancji wynosiła Q_0 , określić jej ilość $Q_t^{(n)}$ po upływie czasu t , jeżeli $\tau = t/n$. Znaleźć $Q_t = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_t^{(n)}$.